مفاهیم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی

استدلال استقرایی[1] و استدلال استنتاجی[2] و یادگیری معنادار

مترجم: محمدحسام قاسمی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

کلیدواژه‌ها: استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، اهداف تدریس ریاضی، معادل‌یابی، تعمیم، یادگیری اصول، ساخت‌وسازگرایی، یادگیری طوطی‌وار، برقراری ارتباط، بستر معنی‌دار

استدلال‌های استقرایی و استدلال استنتاجی

معرفی مفهوم

«استدلال‌های استقرایی و استنتاجی»، دو نوع اصلی و مهم تشکیل‌دهندهٔ تفکر در ریاضی هستند. استدلال استقرایی نوعی نتیجه‌گیری مبتنی بر الگوها، شباهت‌ها، معادل‌ها و تعمیم آن‌ها برای پیش‌بینی موقعیت‌های مشابه در آینده است. استدلال استنتاجی نیز نوعی نتیجه‌گیری بر مبنای مباحث معتبر، اصول و نتایجی است که قبلاً درستی آن‌ها به اثبات رسیده است. استدلال استنتاجی از توان و قدرت بیشتری برای متقاعد کردن دیگران، و توضیح چرایی پدیده‌ها در ریاضی برخوردار است. اما این به‌معنی ضعیف و بی‌فایده بودن استدلال استقرایی نیست، چون در سطح دورهٔ ابتدایی که مورد بحث ماست، این نوع استدلال از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. هر دو نوع استدلال، در ریاضی کارساز هستند، هرچند کاربرد استدلال استنتاجی برای اثبات قضایا، فراگیرتر است.

توضیح و بحث

برای روشن شدن بحث و تفاوت‌های بین این دو نوع استدلال، به گزاره‌های «حاصل‌جمع یک عدد فرد با یک عدد زوج، همیشه یک عدد زوج است» و «حاصل‌ضرب یک عدد فرد در یک عدد زوج، همیشه زوج است» دقت کنید. درستی این گزاره‌ها را برای چند عدد خاص می‌توان امتحان کرد. اگر بخواهیم درستی این گزاره‌ها را صرفاً از روی مثال‌ها و نمونه‌های محدودی نتیجه‌گیری کنیم، آن‌وقت نوع نتیجه‌گیری ما از نوع استقرایی است. اما اثبات این که همیشه حاصل‌جمع عدد فرد با عدد زوج، زوج می‌شود، صرفاً با استدلال استقرایی و از روی درستی چند مثال محدود، امکان‌پذیر نیست و اینجاست که باید از روش‌های منطقی و محکم‌تری مبتنی بر اصول، قضایا و نتایج اثبات شده و قوی‌تر استفاده کنیم که به آن، نتیجه‌گیری استنتاجی گفته می‌شود. احکام مبتنی بر استدلال استنتاجی برخلاف استدلال استقرایی، قوی‌تر و عمومی‌تر هستند و با خیال راحت و با اطمینان قطعی می‌توان حکم موردنظر را برای مثال‌های مشمول شرایط مسئله، به‌کار برد. مثلاً اگر به کمک استدلال استنتاجی، ثابت شده باشد که «حاصل‌ضرب یک عدد

فرد در یک عدد زوج، همواره عددی زوج است»، اگر جایی با عبارت «۳۲۶۱=۴۸×۶۷» مواجه شدیم، سریعاً و بدون انجام عمل ضرب، متوجه می‌شویم که این حاصل‌ضرب، نادرست است.

در برنامهٔ درسی ملی انگلستان (DFEE, 1999a)، با وجود اینکه تصور می‌شود استدلال استقرایی کارایی کمتری در ریاضی دارد، اما در آن، بر استفاده، به‌کارگیری و آموزش هر دو نوع استدلال استقرایی و استنتاجی، تأکید شده و در برنامه‌های مطالعاتی برای مرحلهٔ کلیدی۱[3] (۵ تا ۷ ساله) و مرحلهٔ کلیدی۲[4] (۷ تا ۱۱ ساله)، بخش‌هایی به آموزش این دو نوع استدلال اختصاص یافته است. برای نمونه در این برنامه، در رابطه با استدلال استقرایی تأکید شده که دانش‌آموزان باید یاد بگیرند که:

- الگوهای ساده و روابط بینشان را تشخیص داده و آن‌ها را برای حالت‌های بعدی، پیش‌بینی کنند (DFEE, 1999a, KS1: 65)
- بتوانند با موفقیت، الگوها و نتایج حاصل شده از آن‌ها را درک کنند و به ساخت و ارزیابی احکام کلی بپردازند (DFEE, 1999a, KS2:67)

در رابطه با استدلال استنتاجی نیز، دانش‌آموزان یاد بگیرند که:

- روش حل خود و استدلال همراه با آن را در حین کار بر روی مسئله، توضیح دهند (DFEE, 1999a, KS1: 62)
- تفکرات منطقی خود را توسعه داده و بتوانند از استدلال منطقی خود دفاع کنند (DFEE, 1999a, KS2: 67)
- به درستی و سهولت، از استدلال استنتاجی، در مورد اثبات قضایای هندسه و در مورد شکل‌ها و فضا، استفاده کنند (DFEE, 1999a, KS2: 71)

استراتژی بازبینی‌شدهٔ مدارس ابتدایی (DFES,2006b: 9)، بر اهمیت یادگیری ریاضی توأم با استدلال کردن، تأکید زیادی دارد و عنوان می‌کند «کودکان باید یاد بگیرند که هر آنچه را که می‌بینند، تفسیر کنند و توضیح دهند و نحوهٔ استفاده از آن‌ها را به عنوان پایه‌ای برای تقویت سطح تفکر و قدرت استدلال خود، یاد بگیرند». در اصل، ریاضی‌وار استدلال کردن، هم‌معنا و مترادف با جملهٔ «ارائهٔ استنتاج‌ها براساس فرضیات، دانش موجود و حقایق» است. استدلال کردن هم‌چنین، یکی از پنج موضوع کلیدی است که در بخش استفاده و به‌کارگیری ریاضیات، در چارچوب بازبینی شدهٔ ریاضیات این سند، آورده شده است. با این حال، به‌نظر می‌رسد که تمرکز اصلی این سند، عمدتاً بر استدلال استقرایی است که نشان می‌دهد این نوع استدلال برای دانش‌آموزان در این ردهٔ سنی، بسیار مهم‌تر از استدلال استنتاجی است. برای مثال، دانش‌آموزان در پایهٔ دوم (۶ تا ۷ ساله)، الگوها و روابط درون اشکال و دنباله‌های عددی را به خوبی شرح می‌دهند، پیش‌بینی می‌کنند و این مثال‌ها را بدون آن که اثبات دقیقی از آن‌ها ارائه کنند، تعمیم می‌دهند. دانش‌آموزان پایهٔ پنجم هم (۹ تا ۱۰ ساله)، توانایی آن را دارند که یک حکم عمومی در مورد الگوی موجود در اشکال و دنباله‌های عددی در قالب یک جمله بیان کنند و مثال‌هایی برای درست یا غلط بودن جملهٔ خود ذکر کنند (DFES, 2006b: 4-5). این ایده، بسیار مشابه ایدهٔ موجود در سه بخش «معادل‌یابی»، «تعمیم» و «یادگیری اصول» از مفاهیم همین کتاب است و در آن‌ها، مباحث تقریباً مشابهی با استدلال‌ها، مطرح شده است.

اکنون این سؤال مطرح است که اگر استدلال استنتاجی یکی از قدرتمندترین انواع استدلال در ریاضیات است و هنگامی که می‌خواهیم یک گزاره یا یک فرضیه را در ریاضی ثابت کنیم، می‌بایست از این نوع استدلال استفاده کنیم، پس چرا در مورد ردهٔ سنی مورد بحث {دوره ابتدایی}، کمتر بر آن تأکید شده است؟ برای مثال در هندسه، قضیه‌ای تحت عنوان «قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین» مطرح است، اما این قضیه برای دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی اثبات نمی‌شود و به‌صورت استقرایی و تنها با چند مثال مطرح و تدریس می‌شود. مثلاً به کودکان گفته می‌شود که «اگر در یک مثلث متوجه شویم که دو ضلع، دارای طول‌های مساوی هستند، آن‌گاه زاویه‌های روبروی آن دو ضلع نیز، با هم مساوی هستند». این نتیجه‌گیری را به دیگر مثلث‌های مشابه نیز تعمیم می‌دهیم که اگر قرار بود آن را با استدلال استنتاجی برای دانش‌آموزان ابتدایی اثبات کنیم، به مباحث منطقی، تعریف‌های دقیق و چندین مرحله استنتاج احتیاج داشتیم تا این نتیجه ثابت شود. سؤال دیگر این است که آیا فقط به‌دلیل اینکه برخی از نتایج جذاب و شگفت‌انگیزی که در ریاضیات موجود است، رسماً محتاج اثبات و پیش‌نیازهای خاص هستند، نباید آن‌ها را برای دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی نیز به زبانی ساده‌تر مطرح کنیم تا از زیبایی‌های نهفته در آن، لذت ببرند؟ هر چند شاید اثبات رسمی قضایا و نتایج به شکل رسمی و از طریق استدلال استنتاجی، برای دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی زود به نظر برسد، اما معنایش

استدلال استقرایی نوعی نتیجه‌گیری مبتنی بر الگوها، شباهت‌ها، معادل‌ها و تعمیم آن‌ها برای پیش‌بینی موقعیت‌های مشابه در آینده است. استدلال استنتاجی نیز نوعی نتیجه‌گیری بر مبنای مباحث معتبر، اصول و نتایجی است که قبلاً درستی آن‌ها به اثبات رسیده است

این نیست که آنان را از دانستن الگوها و نظم‌های زیبای موجود در اکثر قضایای ریاضی محروم کنیم. ما می‌توانیم به کمک اثبات‌های غیررسمی شامل توضیح دادن و متقاعد کردن، عدم پیدا شدن مثال نقض در اثر تلاش‌های مکرر دانش‌آموزان، و با بهره‌گیری از استدلال استقرایی و با زبانی ساده و قابل فهم، صحیح بودن یک نتیجه یا گزاره را به دانش‌آموزان نشان دهیم. این نوع اثبات‌های غیررسمی، غالباً مبتنی بر استدلال استقرایی هستند و همگی می‌توانند مقدمه‌ای برای آموزش استدلال استنتاجی در آینده باشند.

در قسمت «برقراری ارتباط[5]» از بخش «استفاده و به‌کارگیری ریاضی» از چارچوب مدارس ابتدایی(DFES, 2006b: 5-4)، پیشنهاد شده است که دانش‌آموزان پایهٔ دوم، «تعمیم‌ها، نتایج و روش‌ها را توضیح دهند»، دانش‌آموزان پایهٔ چهارم «از راه‌حل‌های خود برای حل مسائل دفاع کنند و آن را با توضیح و استدلال منطقی همراه سازند» و دانش‌آموزان پایهٔ ششم نیز، «حتماً نتیجه‌گیری‌های خود را همراه با استدلال توضیح دهند.»

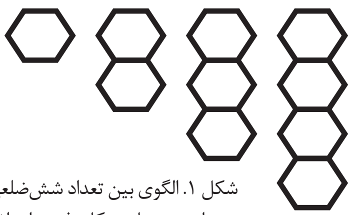
می‌توانیم به کمک اثبات‌های غیررسمی شامل توضیح دادن و متقاعد کردن، عدم پیدا شدن مثال نقض در اثر تلاش‌های مکرر دانش‌آموزان، و با بهره‌گیری از استدلال استقرایی و با زبانی ساده و قابل فهم، صحیح بودن یک نتیجه یا گزاره را به دانش‌آموزان نشان دهیم

مثال‌های عملی

در ادامه، سه مثال آورده شده است که در دو مثال اول، نشان می‌دهیم که چگونه دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی، می‌توانند بدون استفاده از استدلال استنتاجی، از استدلال‌های غیررسمی (مثل توضیح متقاعدکننده[6])، برای اثبات یک الگو استفاده کنند و در مثال سوم، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از یک زبان منطقی ساده، به‌اثبات درستی یک مطلب پرداخت. مجدداً یادآوری می‌کنیم که منظور ما از ارائهٔ یک توضیح متقاعدکننده، هیچ‌گاه ارائه اثبات دقیق مانند آن‌چه که در اثبات‌های ریاضیات سطح بالاتر مرسوم است نیست، بلکه توضیحاتی هستند که بسته به سن و میزان دانش یادگیرنده، در جهت پرورش تفکر استدلالی و آمادگی برای استفاده از استدلال استنتاجی در آینده، قابل استفاده هستند و توصیه می‌شود که از این رویکرد، استفاده شود.

ارائه یک توضیح متقاعدکننده

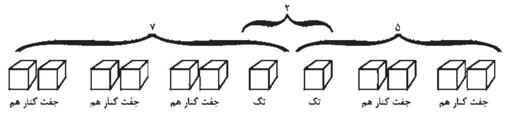
یک دانش‌آموز شش‌ساله می‌تواند از استدلال استقرایی، در رابطه با شکل ۱، برای توضیح الگوی بین تعداد شش‌ضلعی‌ها و تعداد چوب‌های به‌کار رفته برای اضلاع، استفاده کند. معلم می‌تواند دانش‌آموزان را تشویق کند که فراتر از پر کردن جدول عمل کنند و به‌طور منطقی، دلیلی برای متقاعدکردن معلم و همکلاسی‌هایشان، دربارهٔ درستی تعمیمی که داده‌اند، ارائه دهند. برای مثال، یک پاسخ متقاعدکننده، می‌تواند این باشد که «اگر اول یک چوب‌کبریت داشته باشیم، برای آنکه یک شش‌ضلعی بسازیم، به ۵ چوب‌کبریت دیگر احتیاج داریم. پس از آن، هر زمان که بخواهیم یک شش‌ضلعی دیگر بسازیم، باز هم باید از ۵ چوب‌کبریت دیگر استفاده کنیم پس می‌توانیم تعداد شش‌ضلعی‌ها را در ۵ ضرب کنیم و یکی (اولین چوب‌کبریت) را به آن اضافه کنیم.»



شکل ۱. الگوی بین تعداد شش‌ضلعی‌ها و تعداد چوب‌های به‌کار رفته برای اضلاع

تعداد چوب‌ها	تعداد شش‌ضلعی‌ها
۶	۱
۱۱	۲
۱۶	۳
۲۱	۴
؟	۵
؟	۶
؟	۳۰

به همین ترتیب در مثالی دیگر، با راهنمایی معلم، یک کودک ۴ ساله می‌تواند با استفاده از بلوک‌هایی که در شکل ۲ مشاهده می‌کنید، توضیح دهد که چرا جمع دو عدد فرد مانند (۵+۷)، یک عدد زوج می‌شود. مثلاً، یک پاسخ متقاعدکننده می‌تواند این باشد که «اگر تعداد بلوک‌ها فرد باشد، وقتی آن‌ها را دوتا دوتا کنار هم می‌گذاریم، همیشه یکی از بلوک‌ها تک می‌ماند. ولی وقتی از دو دسته بلوک که تعدادشان فرد است، استفاده می‌کنیم و از هر کدام یک بلوک تک باقی می‌ماند، آن‌وقت با کنار هم قرار دادن این دو بلوک تک، یک جفت بلوک ایجاد می‌شود و در کل، دیگر هیچ بلوک تکی باقی نمی‌ماند، پس وقتی دو دسته بلوک فرد را با هم جمع می‌کنیم، مجموعشان عدد زوج است.»

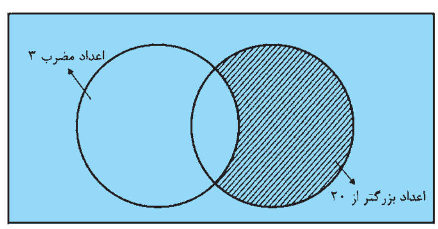


شکل ۲. جمع دو عدد فرد یک عدد زوج است.

رابطه‌های منطقی

افزایش توانایی در اســتدلال اســتنتاجی، معمولاً با شــناخت درســت از رابطه‌های منطقی در گزاره‌های ریاضــی مرتبط اســت. نمونه‌های عمدهٔ ایــن رابطه‌ها، واژه‌هایــی مانند «و»، «یا»، «اما»، «نــه این و نه آن»، «هرگز»، «اگر....، آن گاه ...»[۷] هستند که از آن‌ها، برای ارتباط بین اجزای جمله‌ها و مرتبط کردن عبارت‌ها به هم، استفاده می‌کنیم.

البته باید توجه داشته باشیم که متداول‌ترین حالت نادرستِ استفاده از استدلال منطقی توسط بسیاری از دانش‌آَموزان خُردســال این است که فکر می‌کنند اگر «A نتیجه دهد B»، حتماً «B هم نتیجه می‌دهد A»! مثلاً ممکن است که دانش‌آموز، همین حالت نادرست را برای اشــکال چهاروجهی، به این صورت به‌کار گیرد که بگوید «اگر یک مربع داشــته باشــیم، آن‌گاه قطرها دقیقاً نیمساز زاویه‌های قائمه هستند. پس اگر قطرهای یک چهارضلعی، نیمساز زاویه‌های قائمه آن باشند، آن چهارضلعی یک مربع اســت» (شــما می‌توانید با طرح لوزی به‌عنوان یک مثال نقض، آن‌ها را به چالش بکشید). دانش‌آموزان ابتدایی می‌توانند از این رابطه‌های منطقی مهم، برای اســتدلال کردن در مورد عضو بودن یا عضو نبودن اعداد در یک مجموعه (البته در مجموعه‌های رسم شده به شکل هندسی) نیز، استفاده کنند. برای مثال به کمک شــکل۳، می‌توانیم مجموعه‌ای از اعدادِ ۱ تا ۵۰ را به‌صورت یک مجموعه (به شــکل مستطیل) در نظر بگیریم کــه از دو مجموعه اعداد؛ یکی مضرب‌های ۳ و دیگری اعداد بزرگ‌تر از ۲۰ (که به شکل دو دایره نشان داده شــده)، تشکیل شده است. سپس از دانش‌آموزان بخواهیم مشخص کنند که کدام محدوده از این شکل، می‌تواند اعداد زیر را در بر داشته باشد:



شکل ۳. مجموعه‌ای از اعداد ۱ تا ۵۰

- عددی مانند ۲۷ که هم مضرب ۳ است و هم بزرگ‌تر از ۲۰ است (هم این و هم آن.)
- عددی مثل ۲۸ که مضرب ۳ نیســت، اما بزرگ‌تر از ۲۰ است (این نه، اما آن.)
- عــددی مثــل ۱۸ که مضرب ۳ اســت، امــا از ۲۰ کوچک‌تر است (این بله، اما آن نه.)
- عددهایی مانند ۶، ۲۳، ۲۴ که یا مضرب ۳، یا بزرگ‌تر از ۲۰، یــا هــم مضرب ۳ و هم بزرگ‌تر از ۲۰ باشــند (رابطه‌های منطقی یا و هم این و هم آن.)
- عــددی مثل ۶ یا ۲۳ که مضرب ۳ یا بزرگ‌تر از ۲۰ باشد، اما هر دو نباشد (رابطه منطقی یا و اما.)
- عددی مانند ۱۷ که نه مضرب ۳ باشد، نه بزرگ‌تر از ۲۰ (رابطه منطقی نه این و نه آن.)

ســپس، اگر یکی از چهــار زیرمجموعه موجود در شکل۳ را با اعداد عضو آن، حذف کنیم یا نادیده بگیریم، (برای مثال، آن‌هایی را که در ناحیه هاشور خورده قرار دارند، حذف کنیم) و از دانش‌آموزان بخواهیم که دربارهٔ اعداد باقی‌مانده در نمودار، درســت یا نادرســت بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنند.

- اگر عدد مضربی از ۳ باشد، پس بزرگ‌تر از ۲۰ است.
- اگر عدد بزرگ‌تر از ۲۰ باشد، پس مضربِ ۳ است.
- اگر عدد مضرب ۳ نباشد، بزرگ‌تر از ۲۰ نیست.
- اگر عدد بزرگ‌تر از ۲۰ نباشد مضرب ۳ نیست.

(راهنمایی: گزاره‌های دوم و سوم درست و دو گزارهٔ دیگر، نادرست هستند.)

مطالعهٔ بیشتر

بــارودی (۱۹۹۳، صــص. ۷۲-۵۷)، مطلب کاملی دربارهٔ استدلال استقرایی و استنتاجی به همراه مثال‌ها و مسائل طراحی شدهٔ بســیار جذابی با رویکرد کاربرد استدلال منطقی، برای دانش‌آموزان در محدودهٔ سنی دورهٔ ابتدایی، ارائه می‌کند. هم‌چنین، فصل ۲۷ از کتاب هایلاک (۲۰۰۶) را با موضوع اســتدلال ریاضی را نیز، مطالعه کنید. پاوند[۸] (۲۰۰۶) هم راهنمایی مفیدی برای تقویت اســتدلال ریاضی در کودکان در محدودهٔ سنی مورد نظر، فراهم کرده اســت. هجنی و اســلیزاکوف[۹]، مطالعات مــوردی و جالبی را با موضوع اســتدلال در ریاضی، بر روی دانش‌آموزان خُردسال انجام داده‌اند (به فصل ۵ از کوکبرن، ۲۰۰۷، مراجعه کنید.)

یادگیری معنادار [10]

معرفی مفهوم

«یادگیری معنادار» به‌نوعی روش یادگیری اشاره دارد که طی آن، دانش‌آموزان به‌غیر از حفظ کردن دانش و مهارت‌های ریاضی که قرار است در آینده به آن‌ها نیاز پیدا کنند، به‌طور فعال با آن‌ها درگیر می‌شوند تا معناهای قابل درک برای خودشان، بسازند. این معناسازی، در اثر ایجاد ارتباط بین یادگیری‌های جدید با یادگیری‌های قبلی دانش‌آموزان و اتصال و یکپارچه کردن یادگیری‌های جدید با طرحواره‌های ذهنی موجود در آن‌ها، به‌وجود می‌آید. به‌طور خلاصه، «یادگیری معنادار» در مقابل «یادگیری طوطی‌وار» قرار می‌گیرد.

توضیح و بحث

مایر(۲۰۰۱)، یاگیری معنادار را نوعی یادگیری توصیف می‌کند که طی آن دانش‌آموزان قادر خواهند بود با استفاده از دانش خود برای حل مسئله‌های نو و موقعیت‌های یادگیری جدید، از دانشی که فرا گرفته‌اند برای حل مسئله و فهمیدن مفاهیم جدید بهره ببرند. مفهوم یادگیری معنادار، با دیدگاه ساخت‌وسازگرایی در یادگیری ریاضی، سازگاری دارد. در نگاه ساخت‌وسازگرایی، دانش‌آموز وقتی چیزی را فهمیده است که بتواند دست به ساختنِ معنی مبتنی بر تجربه‌های خود بزند. این ساختنِ معنی به کمک ایجاد ارتباط و اتصال شناختی بین دانش و تجربه‌های جدید با دانش و تجربه‌های قبلی، امکان‌پذیر است. به گفتهٔ هایلاک و کوکبرن (۲۰۰۳، فصل ۱)، دانش ورودی و جدید، باید بتواند با شبکه‌ای از رابطه‌های شناختی موجود در ذهن دانش‌آموز، ارتباط برقرار کند.

مایر(۲۰۰۱)، هفت شاخص را برای تشخیص یادگیری معنادار در دانش‌آموزان، معرفی کرده است که اگرچه ظاهر واژه‌ها به هم شباهت دارند، اما برخلاف یادگیری طوطی‌وار، به شکل قوی‌تر و مشخص‌تری این شاخص‌ها، در روش‌هایی که دانش‌آموزان به کار می‌گیرند، دیده می‌شود. [یعنی این شاخص‌ها، اگرچه به‌عنوان هفت رفتار معرفی شده‌اند، اما رفتارهای شناختی و عادت‌های ذهنی هستند نه رفتار به معنای بروز بیرونی که در روان‌شناسی رفتاری، مورد نظر است.] این هفت شاخص شامل: توانایی در تفسیر کردن[11]، تمثیل آوردن[12]، دسته‌بندی کردن[13]، جمع‌بندی کردن[14]، مقایسه کردن[15]، استنباط کردن[16] و توضیح دادن[17] هستند. این شاخص‌ها را در قالب مثال‌های، زیر تبیین می‌کنیم.

تفسیر کردن

دانش‌آموز در مواجهه با سؤال «چقدر باید به ۱۷/۵۶ پوند اضافه کرد تا ۴۵/۰۶ پوند داشته باشیم؟»، باید بتواند این سؤال را به‌عنوان یک عمل تفریق(۴۵/۰۶-۱۷/۵۶) تفسیر کرده و پس از رسیدن به پاسخ ۲۷/۵ به کمک ماشین‌حساب، این پاسخ را مجدداً در قالب ۲۷/۵۰ پوند، تفسیر کند.

تمثیل آوردن

دانش‌آموز باید بتواند مثال‌هایی از مفهوم تقارن بازتابی در محیط کلاس و با جست‌وجو کردن و بررسی اشکال دوبعدی موجود در کلاس را یافته و ارائه کند. همچنین جای خطوط تقارن این اشکال را نیز مشخص کند.

دسته‌بندی کردن

دانش‌آموزی که قبلاً در مورد تقارن دورانی آموزش دیده است، باید قادر باشد مجموعه‌ای از اشکال طراحی شده را از نظر نوع تقارن دورانی آن‌ها، دسته‌بندی کند. مثلاً قادر باشد که تقارن از مرتبهٔ ۲، مرتبهٔ ۳، مرتبهٔ ۴ و مراتب بالاتر را از هم تشخیص داده و دسته‌بندی کند.

جمع‌بندی کردن

اگر یک نمودار میله‌ای را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهیم که موضوع آن، نتیجهٔ نظرسنجی از دانش‌آموزان در مورد نوع وسیلهٔ نقلیه‌ای باشد که با آن به مدرسه می‌آیند، او باید بتواند به‌طور مختصر و مفید، آن‌چه را که این نمودار می‌خواهد بگوید، جمع‌بندی نموده و زیر آن به‌عنوان توضیح نمودار، بنویسد.

مقایسه کردن

یک دانش‌آموز پس از یادگیری مبحث رسم اشکال در مقیاس‌های متفاوت، هنگامی که دو شکل در اختیار

او قرار می‌گیرد که یکی دو برابر شدهٔ دیگری است، باید بتواند آن دو را با هم مقایسه نموده و شباهت‌ها و تفاوت‌های آن‌ها را مشخص کند.

استنباط کردن

دانش‌آموز هنگام روبه‌رو شدن با زنجیره‌هایی از مربع‌های چوب کبریتی متصل به هم، باید بتواند متوجه ارتباط بین تعداد مربع‌های یک زنجیر و تعداد چوب کبریت‌های لازم برای ساخت آن‌ها شود. مثلاً بتواند تعداد چوب کبریت‌های مورد نیاز را برای ساختن یک زنجیر با ۲۰ مربع، پیش‌بینی کند.

توضیح دادن

با در اختیار داشتن یک قاعده یا فرمول برای شمارش تعداد چوب کبریت‌ها در زنجیرهٔ مربع‌هایی که عنوان شد (اضافه شدن سه چوب کبریت برای ساختن هر مربع جدید)، دانش‌آموز باید قادر باشد به خوبی توضیح دهد که چرا این قاعده در این مورد، جواب می‌دهد.

برای ایجاد تجربه‌های ریاضی بیشتر و بهتر برای دانش‌آموزان در درس ریاضی، بسیار مهم است که معلمان یاگیری معنادار را در کلاس‌هایشان ترویج داده و دانش‌آموزان را تشویق کنند که خود را با این روش تدریس، وفق داده و همواره به‌طور فعال، به‌دنبال ساختن معنا باشند. برای مثال، چهار راهکار زیر را به‌عنوان نمونه، برای کمک به معلمان در این راه، پیشنهاد می‌کنیم.

- تا حد امکان، ریاضی را در زمینه و محتوایی ارائه کنید که برای دانش‌آموزان معنادار باشد.
- تدریس خود را با گنجاندن فعالیت‌هایی غنی کنید که به‌طور خاص، برای کمک به دانش‌آموزان در برقراری ارتباط و اتصال بین مفاهیم و مهارت‌های مختلف، طراحی شده‌اند؛ مثل برقراری ارتباط بین عناصر زبانی، دست‌ورزی‌ها، نمادها و اشکال ریاضی.
- فرصت‌هایی فراهم کنید که دانش‌آموزان بتوانند هفت مشخصهٔ رفتاری یادگیری معنادار را که قبلاً به آن‌ها اشاره شد، در خود پرورانده و برای ایجاد هر یک از این رفتارهای ذهنی، پاداش [درونی] دریافت کنند.
- سعی کنید از زبان و نمادهای ریاضی که در فعالیت‌های معمول کلاس درس استفاده می‌کنید، یک قالب و مدل مشخص تهیه کنید. این کار به‌ویژه برای دانش‌آموزان سال‌های اول ورود به مدرسه، بسیار مفید

است (تاکر، ۲۰۰۵: ۷).

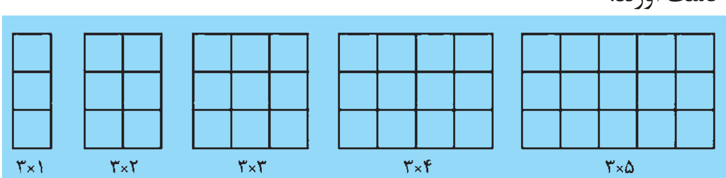
مثال‌های عملی

در ادامه، به یک مثال هندسی و یک مثال عددی که می‌تواند در قالب یادگیری معنادار ارائه شده و برای توسعهٔ آن به کار گرفته شود، اشاره می‌کنیم.

مساحت یک مستطیل

یکی از روش‌های آموزش محاسبهٔ مساحت یک مستطیل که مبتنی بر یادگیری طوطی‌وار است، آن است که فرمول محاسبهٔ مساحت مستطیل را به دانش‌آموزان معرفی کرده و به آن‌ها یاد دهیم که چگونه از آن استفاده کنند. سپس آن را در مثال‌های مختلف تکرار کرده و تکلیف‌های تمرینی و تثبیتی زیادی را در این باره، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهیم. اما می‌توان با ایجاد و برقراری ارتباط و اتصال و قرار دادن این موضوع در یک بستر معنادار، همین مطلب را به روش یادگیری معنادار آموزش داد. مثلاً می‌توان با دانش‌آموزان در مورد ارتباط بین تعداد خانه‌های تشکیل‌دهندهٔ مستطیل‌های شکل ۴ و جدول سه برابرها بحث کرد. بعد از آن‌ها خواسته شود که الگویی را برای این شکل پیدا کرده و این الگو را برای مرحله‌های بعدی توسعه دهند. یا این‌که در محیط خارج از کلاس درس، به جست‌وجوی اشکال مستطیلی شکل مشبک بگردند و عمل ضرب مرتبط به هر شکل را پیدا کنند، یا برای ضرب‌های داده شده، بر روی کاغذ شطرنجی، مستطیل‌های متناظر آن‌ها را رسم کنند. در مرحلهٔ بعدی، از دانش‌آموزان خواسته شود که یک قاعدهٔ کلی برای مساحت مستطیل ارائه کنند و ارتباطاتی را که حین انجام این فعالیت کشف کرده‌اند، به زبان ساده بیان و آن را در یک قالب مشخص نمادگذاری کنند. این شیوهٔ یادگیری را می‌توان برای محاسبه و تخمین مساحت اشکال و سطوح موجود در کلاس و در قالب موقعیت‌های حل مسئله نیز به‌کار گرفت. مثلاً از دانش‌آموزان بخواهیم به کمک قاعده‌ای که برای محاسبهٔ مساحت مستطیل یاد گرفته‌اند، مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه را نیز به دست آورند.

«یادگیری معنادار» به‌نوعی روش یادگیری اشاره دارد که طی آن، دانش‌آموزان به‌غیر از حفظ کردن دانش و مهارت‌های ریاضی که قرار است در آینده به آن‌ها نیاز پیدا کنند، به‌طور فعال با آن‌ها درگیر می‌شوند تا معناهای قابل درک برای خودشان، بسازند



شکل ۴ ارتباط بین مساحت و جدول سه‌برابرها

جبران کردن در تفریق[18]

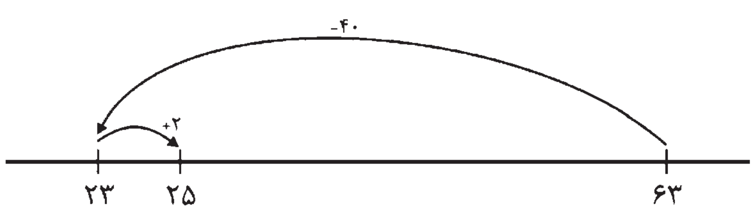
یکی از استراتژی‌های مهمی که دانش‌آموزان در مدارس ابتدایی یاد می‌گیرند، جبران کردن در تفریق اســت. در این اســتراتژی، مقداری به یکی از اعداد موجود در تفریــق (معمولاً عددی که دارای یکان ۸ یا ۹ است) اضافه می‌شود تا کار تفریق، ساده‌تر انجام شــود و پس از یافتن حاصل تفریق، این مقدار اضافه شده را از آن کم می‌کنیم تا جبران شود. معلمی که می‌خواهــد چنین تفریق‌هایی را بــه روش یادگیری معنــادار آموزش دهد، لازم اســت در ابتدا، اطمینان حاصل کند که دانش‌آموزان، فرصت‌های لازم را برای تفسیر چنین تفریق‌هایی، مثل ۳۸-۶۳، به قالب‌های زبانی مختلف داشــته‌اند. برای نمونــه، کودکان باید بدانند که می‌توان عمل تفریق را به «اختلافِ بین»، «چقــدر باید اضافه شــود» و «فاصله داشــتن» نیز، تفســیر کرد. سپس معلم سؤالاتی از دانش‌آموزان در مورد مقایسهٔ این تفریق با تفریق‌های دیگر می‌پرسد،ماننــد، این‌که این تفریق با تفریق ۴۰-۶۳ چه فرقی دارد؟ در ایــن تفریق عدد بزرگتر تغییر کرده یا عدد کوچکتر؟ اگر تفریق دوم را انجام دهیم، پاسخ آن از پاســخ اصلی بیشتر اســت یا کمتر؟ آیا با جایگزینی عــدد ۴۰ به جای ۳۸، به عدد ۶۳ نزدیک شــده‌ایم یا از آن دور شــده‌ایم؟ دانش‌آموزان برای درک بهتر می‌تواننــد ایــن تفریق را به کمک کار با ســکه‌ها یا تصویرها، مانند شــکل ۵ که یک نمــودار مربوط به محــور اعــداد اســت، یاد بگیرنــد. همچنیــن آن‌ها می‌توانند بــرای مثال‌های دیگر مانند اعداد ۳ رقمی نیز، آن‌چه را که یاد گرفته‌اند به‌کار ببرند. می‌توان از آن‌ها خواست تا برای برخی از تفریق‌ها، نمودار محور اعداد رسم کنند و به‌طور خلاصه، متنی را خطاب به دوســتان خود بنویسند و در آن، چگونگی تفکر خود را در مورد انجام این تفریق‌ها توضیح دهند.

مطالعهٔ بیشتر

مطالعهٔ همهٔ منابع پیشــنهادی در بخش مطالعهٔ بیشــتر از مفهــوم «یادگیری طوطــی‌وار» را توصیه می‌کنیم. اضافه بر این، می‌توانید توضیحات هایلاک و کوکبــرن (۲۰۰۳) را در مــورد ترویج اصل ایجاد ارتباط و به‌خصوص مطالب فصل‌های ۱ تا ۴ را دنبال کنیــد. چکیدهٔ مفیــدی نیز از دیدگاه‌هــای متفاوت یاددهــی و یادگیری ریاضی، از نظریهٔ تکرار و تمرین گرفته تا ساخت‌وســازگرایی، در فصل ۲ از هریس و اسپونر[19] (۲۰۰۰) جمع‌آوری شده است که خواندن آن را توصیه می‌کنیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Inductive reasoning
2. Deductive reasoning
3. Key stage 1 (5 to 7 years) : KS1
4. Key stage 2 (7 to 11 years) : KS2
5. Communicating
6. Convincing explanation
7. “If . . ., then . . . .”
8. Pound
9. Hejny and Slezakova
10. Meaningful learning
11. Interpreting
12. Exemplifying
13. Classifying
14. Summarizing
15. Comparing
16. Inferring
17. Explaining
18. Compensation in subtraction
19. Harries and Spooner



شکل ۵ یک محور اعداد که ارتباط بین تفریق ۳۸-۶۳ را با تفریق ۴۰-۶۳ نشان می‌دهد.